

Θέμα 1. (2 μον.)

α) Έστω X ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Πότε μια απεικόνιση $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται νόρμα; Αν $\| \cdot \|$ είναι μια νόρμα στον X να ορίσετε τη μετρική που ορίζει η νόρμα αυτή και να δείξετε ότι είναι πράγματι μετρική.
β) Να εξετάσετε αν καθεμιά από τις παρακάτω απεικονίσεις $\| \cdot \|_a, \| \cdot \|_b, \| \cdot \|_c$ είναι νόρμα στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$. Για όποια ή όποιες η απάντηση είναι θετική να βρεθεί και ο τύπος της αντίστοιχης νόρμας.

$$\begin{aligned}\|(x, y, z, w)\|_a &= x^2 + |y| + |z| + |w| & \|(x, y, z, w)\|_b &= |x| + |y| + |z| + |w| \\ \|(x, y, z, w)\|_c &= |x| + |y| + |w|.\end{aligned}$$

Θέμα 2. (2 μον.)

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Χωρίς να θεωρηθεί δεδομένη η ισοδυναμία της συμπαγείας με την ακολουθιακή συμπαγεία να δείξετε τα εξής:

- α) Αν Γ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του X τότε το Γ είναι κλειστό.
β) Αν Γ είναι ένα ακολουθιακά συμπαγές υποσύνολο του X τότε το Γ είναι κλειστό.

Θέμα 3. (2 μον.)

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος.

- α) Αν $\Gamma \subseteq X$ και $y \in X$ να δείξετε την εξής ισοδυναμία:

$$y \in \bar{\Gamma} \Leftrightarrow \text{υπάρχει ακολουθία } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ στο } \Gamma \text{ με } x_n \xrightarrow{\rho} y.$$

- β) Αν $z \in X$ και $\lambda > 0$ να δείξετε ότι το σύνολο $B_\rho(z, \lambda)$ είναι ανοικτό.

Θέμα 4. (1 μον.)

Αν A και B είναι τα δυο τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας και θέσουμε $a = A + 12$, $\beta = B - 13$, να βρείτε ένα υποσύνολο K του $\mathbb{R}$ που να ικανοποιεί όλες τις παρακάτω ιδιότητες:

- (i) $\sup K = a$ με $a \notin K$. (ii) $\inf K = \beta$.
(iii) Το σύνολο $\Lambda_1 = (-\infty, 0) \cap K$ περιέχει μόνο άρρητους αριθμούς (δηλ. $\Lambda_1 \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).
(iv) Το σύνολο $\Lambda_2 = (0, +\infty) \cap K$ περιέχει μόνο ρητούς αριθμούς (δηλ. $\Lambda_2 \subseteq \mathbb{Q}$).
(v) Το 0 είναι μεμονωμένο σημείο του K και ισχύει $\rho(0, \Lambda_1) = \frac{-\beta}{2}$ και $\rho(0, \Lambda_2) = \frac{a}{2}$.

Θέμα 5. (2 μον.)

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος.

- α) Αν K είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο του X και $M \subseteq X$ με $K \subseteq M \subseteq \bar{K}$, να δείξετε ότι το σύνολο M είναι συνεκτικό.
β) Αν K και Λ είναι δυο υποσύνολα του X με $K \cap \Lambda \neq \emptyset$ ώστε το Λ να είναι συνεκτικό και το K να είναι ταυτόχρονα ανοικτό και κλειστό, να δείξετε ότι $\Lambda \subseteq K$.

Θέμα 6. (2 μον.)

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Να δείξετε ότι ο (X, ρ) είναι πλήρης αν και μόνο αν για κάθε $y \in X$ και κάθε $\delta > 0$ η κλειστή μπάλα $\hat{B}_\rho(y, \delta)$ είναι πλήρες υποσύνολο του X .

Καλή Επιτυχία!